

Estratto dal *Periodico di Matematiche*  
Aprile 1963 - Serie IV, vol. XLI, n. 2 (pagg. 79-99)

---

CARLO FELICE MANARA

## Il computo degli zeri di una funzione



NICOLA ZANICHELLI EDITORE  
BOLOGNA



## PERIODICO DI MATEMATICHE

Il *Periodico di Matematiche* continua la pubblicazione per le scuole medie che, iniziata in Roma da Davide Besso nel 1886, fu curata fino al 1896 da Aurelio Lugli, già dal secondo anno associato alla direzione, e proseguita poi in Livorno da Giulio Lazzeri, fra il 1897 e il 1918; fu rinnovato da FEDERIGO ENRIQUES nel 1921 e da Lui diretto fino al 1946.

Il *Periodico* pubblica soprattutto articoli riguardanti le matematiche elementari intese in senso lato, ed altri tendenti ad una più vasta comprensione dello spirito matematico. Esso contiene inoltre relazioni del movimento matematico straniero, note di bibliografia e di trattatistica, varietà (problemi, giochi, paradossi, etc.) nonchè notizie di carattere professionale.

Il secondo numero (Aprile 1963) della quarantunesima annata consta di 64 pagine e contiene, oltre le Questioni e Recensioni, i seguenti articoli:

O. CHISINI - *Al lettore.*

A. NATUCCI - *Storia della teoria delle equazioni.*

C. F. MANARA - *Il computo degli zeri di una funzione.*

M. DEDÒ - *I calcolatori prodigio.*

M. DEDÒ - *Un elegante teorema sugli ovali.*

Abbonamento 1963: Italia L. 1200 — - Estero L. 2400 —.

Il *Periodico* si pubblica in 5 fascicoli annuali.

L'importo dell'abbonamento e ogni altra comunicazione di indole amministrativa deve inviarsi esclusivamente alla Casa Editrice Nicola Zanichelli  
C.C. Postale 8/36

Le annate complete 39, 40, 41, 42, 43, 46, 47, 48, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61 e 62 dell'attuale serie del

## PERIODICO DI MATEMATICHE

sono in vendita al prezzo di L. 1600 l'annata, per l'Italia,  
L. 2400 per l'estero.

Esistono fascicoli separati dei vari volumi al prezzo di:

L. 600 al fascicolo per l'Italia — L. 1200 per l'estero.



## Il computo degli zeri di una funzione

---

1. - Nel presente articolo abbiamo intenzione di esporre ed illustrare alcuni teoremi che riguardano il computo delle radici di una funzione (o in particolare di un polinomio) appartenenti ad un determinato dominio, del campo reale o complesso.

Avremo di mira in modo particolare la illustrazione delle interpretazioni topologiche che si possono dare dei criteri classici, il che ci permetterà di stabilire alcune analogie ed alcune estensioni che riteniamo non prive di interesse, anche se sostanzialmente note nei loro elementi.

2. - Tra i risultati che ci interessa qui illustrare pensiamo abbiano una indubbia priorità storica quelli che si enunciano con la cosiddetta «regola dei segni di DESCARTES»<sup>(1)</sup> che permette di dare un limite superiore alle radici di una equazione algebrica che siano reali ad abbiano un determinato segno (tale regola dei segni viene abitualmente insegnata anche nei corsi di Algebra delle scuole secondarie) e quelli che si riallacciano al teorema abitualmente indicato come «Teorema di FOURIER», chiamato anche spesso «Teorema di BUDAN e FOURIER»<sup>(2)</sup>, che entra negli abituali programmi di Analisi Algebrica.

Poichè a noi interessa qui in modo particolare la illustrazione di alcuni aspetti topologici che sono legati ai teoremi suddetti, ci rifaremo tuttavia, come punto di partenza, ai risultati

---

(1) Cfr. R. DESCARTES - *La Géométrie*. Livre III.

(2) La priorità storica di FOURIER nella enunciazione e nella dimostrazione del teorema appare fuori dubbio. Cfr. per es. a questo proposito l'Articolo di W. SPECIIR - *Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten in Enzickl. der Math. Wiss. Bd. I, Heft. 3.*

classici di A. CAUCHY, che riguardano il computo delle radici di una funzione complessa di variabile complessa, appartenenti ad una regione data del piano di GAUSS.

Secondo la notazione abituale, indicheremo con

$$z = x + iy$$

una variabile complessa e chiameremo, quando sarà necessario, i numeri reali  $x$  ed  $y$  con le espressioni abituali di « parte reale » e di « coefficiente dell'immaginario » del numero complesso  $z$ . Per i fini che ci proponiamo acquista fondamentale interesse la classica rappresentazione geometrica della variabile complessa che associa biunivocamente al numero complesso  $z$  il punto  $P$  del piano di GAUSS  $\pi_z$  che ammette come coordinate cartesiane ortogonali la  $x$  e la  $y$ , rispettivamente parte reale e coefficiente dell'immaginario di  $z$ . Tale punto  $P$ , secondo il solito, sarà chiamato « indice » del numero complesso  $z$ , il quale a sua volta sarà chiamato « affissa » del punto  $P$ .

Sia data ora una funzione

$$(1) \quad w = f(z)$$

complessa della variabile complessa  $z$ ; secondo la notazione abituale indicheremo con  $u$  e  $v$  rispettivamente la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di  $w$ , ponendo quindi

$$w = u + iv$$

e penseremo pure  $w$  come affissa di un punto  $Q$  appartenente ad un piano di GAUSS  $\pi_w$  in cui  $u$  e  $v$  sono coordinate cartesiane ortogonali.

Come è noto la funzione (1) stabilisce una rappresentazione di una opportuna regione del piano  $\pi_z$  nel piano  $\pi_w$ , rappresentazione che può essere formulata esplicitamente dalle

$$(2) \quad u = u(x, y); \quad v = v(x, y).$$

Si consideri ora un dominio  $\mathfrak{D}$  del piano  $\pi_z$ ; supponiamo che il Lettore conosca il significato della espressione « la funzione  $f(z)$  è monogena, ovvero analitica regolare, in tutto il dominio



$\mathfrak{D}$  » (\*); tale proprietà della funzione  $f(z)$  si traduce nel fatto che le funzioni (2) posseggano derivate parziali prime in tutto il dominio  $\mathfrak{D}$  e che le derivate stesse siano legate dalle condizioni

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

che vengono appunto abitualmente chiamate « condizioni di monogeneità » della funzione  $f(z)$ .

È noto che se le condizioni (3) sono soddisfatte in tutto il dominio  $\mathfrak{D}$ , allora è possibile definire in ogni punto di esso (cioè in corrispondenza ad ogni valore  $z$  che sia affissa di un punto appartenente a  $\mathfrak{D}$ ) una (unica e ben determinata) derivata della funzione  $f(z)$ , derivata che indicheremo con il simbolo abituale  $f'(z)$ , ponendo quindi

$$f'(z) = \lim_{|h| \rightarrow 0} [f(z+h) - f(z)]/h.$$

Si consideri ora una curva  $\gamma$  appartenente al dominio  $\mathfrak{D}$ , che sia una curva regolare, chiusa, non intrecciata; per es. potremo supporre che la  $\gamma$  sia una curva che si ottiene da una circonferenza mediante un omeomorfismo.

Si supponga inoltre che sulla curva  $\gamma$  la funzione  $f(z)$  non possenga zeri. Allora un classico teorema di CAUCHY dimostra che vale la formula

$$(4) \quad \oint_{\gamma} f'(z) dz / f(z) = 2\pi i N_0$$

dove nel primo membro l'integrale si intende preso « lungo » la curva  $\gamma$  percorsa in senso antiorario, e nel secondo membro il

(\*) La nozione di « funzione monogena » è ormai classica e fa parte delle conoscenze abituali che vengono impartite nei corsi universitari; per ulteriori precisazioni rimandiamo ai trattati numerosissimi, fra i quali ricordiamo qui: F. TRICOMI - *Funzioni analitiche* (Bologna 1936); G. SANDONE - *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa* (Padova, 1955); E. GOURSAT - *Analyse mathématique*. Vol. II (Paris, 1933).

simbolo  $N_0$  indica la somma delle molteplicità degli zeri della funzione  $f(z)$  che cadono nell'interno della curva  $\gamma$  <sup>(4)</sup>.

Il teorema espresso dalla (4) viene spesso chiamato « teorema dell'indicatore logaritmico », perchè si ha

$$f'(z)/f(z) = \frac{d}{dz} \log [f(z)]$$

e pertanto

$$(5) \quad \oint_{\gamma} f' dz / f = \oint_{\gamma} d \log f.$$

In altre parole si ha che il primo membro della (4) rappresenta la variazione totale del logaritmo della funzione  $f(z)$  quando il punto  $P$  la cui affissa è  $z$  percorre la curva  $\gamma$  nel verso precisato.

Messo in questa forma il teorema dell'indicatore logaritmico suggerisce una classica interpretazione geometrica, che ricorderemo qui brevemente, perchè ha interesse anche per ciò che segue: riferito il piano di GAUSS  $\pi_w$  a coordinate polari  $R$  e  $\Theta$  e posto

$$u = R \cdot \cos \Theta; \quad v = R \cdot \sin \Theta,$$

si ha, come è noto,

$$(6) \quad \log w = \log f(z) = \log R + i \Theta.$$

Si ha di qui che la (4), in forza della (5), esprime il numero degli zeri della funzione  $f(z)$  che cadono internamente a  $\gamma$  (sempre a meno del fattore  $2\pi i$ ) come variazione totale dell'argomento di

(4) Ovviamente si suppone che il Lettore sia a conoscenza del fatto che, nelle ipotesi di monogeneità, ad ogni zero della funzione  $f(z)$  è possibile assegnare un intero che rappresenta la sua molteplicità; si osservi inoltre che la formula (4) è caso particolare di una formula più generale di CAUCHY, formula che vale anche quando la funzione  $f(z)$  non sia monogena in tutti i punti del dominio  $\mathfrak{D}$ , ma possiede in esso delle singolarità polari.

In questo caso il primo membro della (4) dà, a meno del fattore  $2\pi i$ , la differenza tra la somma delle molteplicità degli zeri e quella delle molteplicità dei poli che cadono nell'interno di  $\mathfrak{D}$ : ovviamente la nostra ipotesi che la funzione (1) sia monogena in tutti i punti di  $\mathfrak{D}$  porta ad escludere che vi siano in  $\mathfrak{D}$  dei punti singolari per la  $f(z)$ .



$w = f(z)$  quando  $z$  descrive la curva  $\gamma$ . Quindi se si considera il punto  $Q$  del piano  $\pi_w$  che è indice del numero complesso  $w = f(z)$ , possiamo osservare che, quando  $P$  descrive  $\gamma$  in  $\pi_z$ ,  $Q$  descrive una curva  $\Gamma$  (regolare e chiusa) in  $\pi_w$  ed in forza di quanto è stato detto il numero degli zeri della funzione  $f(z)$  che sono interni alla  $\gamma$  è uguale al numero di volte in cui la curva chiusa  $\Gamma$  si avvolge intorno all'origine del piano di GAUSS  $\pi_w$ .

3. - La interpretazione geometrica del teorema dell'indicatore logaritmico che abbiamo brevemente esposta nel § precedente è classica, come abbiamo detto; essa oltre a presentare una particolare evidenza possiede anche il vantaggio (nel nostro ordine di idee particolarmente importante) di avere un aspetto « topologico »; con questo modo di esprimerci intendiamo mettere in evidenza che due circostanze particolarmente ci interessano qui:

a) il fatto che la curva  $\Gamma$ , percorsa dal punto  $Q$  il quale sul piano  $\pi_w$  corrisponde al punto  $P$  che descrive la curva  $\gamma$ , sia chiusa;

b) il fatto che la curva  $\Gamma$  si avvolga un certo numero di volte attorno all'origine del piano di GAUSS  $\pi_w$ .

Appare del tutto evidente che queste due circostanze sono invarianti di fronte ad omeomorfismi; in altre parole ed esprimendoci in forma molto intuitiva (il che ci pare giustificato dal carattere espositivo ed illustrativo di questo scritto) potremmo dire che queste due circostanze non variano quando si « deformi » comunque con continuità il piano di GAUSS  $\pi_w$  senza tuttavia operare lacerazioni o duplicazioni.

La stessa cosa può essere esposta sotto un altro aspetto dicendo che la curva  $\Gamma$  può essere « deformata » in modo continuo senza che cambino le due circostanze a) e b) sopra enunciate, purchè beninteso durante la deformazione la curva sia mantenuta chiusa e purchè durante la deformazione la curva stessa non sia attraversata dall'origine del piano  $\pi_w$ .

Una classica applicazione di queste osservazioni conduce alla dimostrazione del teorema che viene chiamato « Teorema di ROUCHÉ »<sup>(5)</sup> che può essere enunciato nel modo seguente:

(5) Cfr. Per es. M. MARDEN - *The Geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable*. New York, 1949.

« Date due funzioni complesse  $f(z)$  e  $F(z)$  della variabile complessa  $z$ , entrambe monogene in tutto il dominio  $\mathfrak{D}$  del piano  $\pi_z$ , e posto

$$(7) \quad F(z) = f(z) + \varphi(z)$$

« se si ha, in tutti i punti della curva  $\gamma$ ,

$$(8) \quad |\varphi(z)/f(z)| < 1$$

« allora entrambe le funzioni  $f(z)$  e  $F(z)$  hanno lo stesso numero di zeri nell'interno della curva  $\gamma$  ».

Per dare un'idea dello spirito in cui si può svolgere la dimostrazione del teorema di ROUCHÉ, indichiamo con  $Q'$  il punto indice della funzione  $F(z)$  sul piano  $\pi_w$ . Dalla (7) si trae che la lunghezza del segmento  $QQ'$ , cioè la distanza tra i punti indici delle funzioni  $f(z)$  e  $F(z)$  è data da

$$(8) \quad QQ' = |F(z) - f(z)| = |\varphi(z)|$$

e per la (8) si ha che tale distanza è sempre minore del modulo  $R$  di  $f(z)$ .

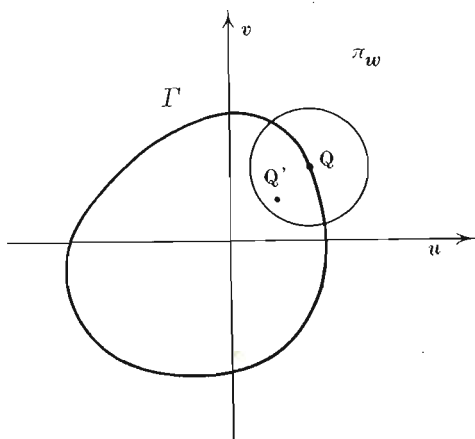


Fig. 1

In altre parole, il punto  $Q'$  risulta essere sempre interno ad un cerchio che ha centro nel punto  $Q$  e che lascia sempre all'esterno l'origine del piano di GAUSS  $\pi_w$  (v. fig. 1). Pertanto, indi-



cando con  $\Gamma'$  la curva descritta nel piano  $\pi_w$  dal punto  $Q'$  quando  $P$  descrive in  $\pi_z$  la curva  $\gamma$ , si può considerare la curva  $\Gamma'$  come ottenuta «deformando» la curva  $\Gamma$ ; in base alla osservazione geometrica fatta, osservazione che è illustrata nella fig. 1, la curva  $\Gamma'$  si avvolge attorno all'origine del piano di GAUSS  $\pi_w$  tante volte quante sono quelle in cui si avvolge  $\Gamma$ .

Una nota ed elegante applicazione di questo teorema si ha nella dimostrazione di quella proposizione che è stata chiamata «Teorema fondamentale dell'Algebra» e che oggi si preferisce chiamare «Proprietà fondamentale del corpo complesso»; essa afferma, come è noto, che una equazione algebrica di grado  $n$

$$(9) \quad a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

con  $a_0 \neq 0$  possiede nel piano di GAUSS  $\pi_z$  esattamente  $n$  radici (contando ogni zero con la dovuta molteplicità).

Per dimostrare questa fondamentale proposizione nello spirito delle considerazioni che stiamo svolgendo, si ponga in particolare

$$(10) \quad F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

e si ponga ulteriormente

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(z) = a_0 z^n \\ \varphi(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n. \end{array} \right.$$

$$(12)$$

Entrambe le funzioni  $f(z)$  ed  $F(z)$  sono ovviamente univoche e monogene in tutto il piano di GAUSS  $\pi_x$ ; considerando inoltre la funzione  $f(z)$  data dalla (11) e ponendo

$$(13) \quad z = \rho e^{i\vartheta}; \quad a_0 = \rho_0 e^{i\vartheta_0}$$

si ha

$$(14) \quad f(z) = w = \rho_0 \rho^n \cdot e^{i(\vartheta_0 + n\vartheta)}$$

ossia, indicando ancora con  $R$  e con  $\Theta$  il modulo e l'argomento del numero complesso  $w$ ,

$$(15) \quad R = \rho_0 \rho^n; \quad \Theta = \vartheta_0 + n\vartheta.$$

Assumiamo ora come curva  $\gamma$  la circonferenza sul piano  $\pi_z$  che è rappresentata dalla condizione

$$(16) \quad \rho = \bar{\rho} \text{ (costante);}$$

dalla (6) e dalla (15), tenendo conto della (16) si trae

$$(17) \quad d \log [f(z)] = i n d\theta.$$

Pertanto l'integrale (5) esteso alla curva  $\gamma$  ora considerata ha per valore  $2\pi i n$ . In forma geometrica questa circostanza potrebbe essere enunciata dicendo che quando il punto  $P$  si muove sul piano  $\pi_z$  descrivendo una volta la circonferenza  $\gamma$  in verso positivo, il corrispondente punto  $Q$ , indice del valore  $f(z)$  sul piano  $\pi_w$  descrive  $n$  volte in senso positivo la circonferenza che ha centro nell'origine del piano stesso ed ha raggio  $\rho_0 \bar{\rho}^n$ .

Si può ora facilmente applicare il teorema di ROUCHÉ semplicemente osservando che in relazione alla funzione  $\varphi(z)$  data dalla (12) è possibile fissare un valore reale  $\rho$  tale che, in corrispondenza ad esso, sulla circonferenza  $\gamma$  data dalla (16) sia verificata la (8). Invero, indicato con  $M$  il massimo modulo dei coefficienti  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) si ha

$$(18) \quad |\varphi(z)| \leq M \{ \rho^{n-1} + \rho^{n-2} + \dots + \rho + 1 \}$$

e quindi, in questo caso,

$$(19) \quad |\varphi(z)/f(z)| \leq \frac{M}{\rho_0} \left\{ \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \dots + \frac{1}{\rho^n} \right\}.$$

Fatto dunque

$$(20) \quad \rho > 1$$

si ha

$$(21) \quad |\varphi(z)/f(z)| < nM/\rho \cdot \rho_0.$$

Basterà quindi scegliere  $\rho$  in modo che valga la (20) e che sia

$$(22) \quad \rho > nM/\rho_0$$



perchè si possa applicare il teorema di ROUCHÉ alla funzione  $\varphi(z)$  data dalla (12). Ne consegue che almeno nell'interno di una circonferenza avente il suo centro nell'origine del piano di GAUSS ed avente un raggio maggiore del valore  $\bar{\rho}$  che compare nella (22) la funzione  $F'(z)$  data dalla (10) ammette  $n$  radici (essendo ciascuna radice contata con la molteplicità che le compete).

4. - Le considerazioni che abbiamo svolte nei precedenti paragrafi e soprattutto le interpretazioni ed illustrazioni geometriche e topologiche dei classici risultati che riguardano le funzioni di variabile complessa (ed in particolare i polinomi) possono essere presentate sotto altra forma; questa nuova presentazione, che ora esporremo, ci offrirà l'adito a generalizzazioni che non sono prive di interesse.

Si considerino due funzioni  $u$  e  $v$  delle due variabili  $x$  ed  $y$  e si supponga che, almeno in un dominio  $\mathfrak{D}$  del piano in cui  $x$  ed  $y$  sono coordinate cartesiane ortogonali, le due equazioni

$$(23) \quad u(x, y) = 0, \quad v(x, y) = 0$$

rappresentino due curve; per semplicità supporremo che tali curve siano regolari, cioè che ognuna di esse sia in ogni suo punto dotata di tangente, che questa variï con continuità al variare del punto della curva ed inoltre supporremo che nessuna delle due curve abbia punti singolari in  $\mathfrak{D}$ . Consideriamo ora una curva  $\gamma$  chiusa, regolare e non intrecciata (per es. una curva omeomorfa ad una circonferenza che appartenga al dominio  $\mathfrak{D}$ ) e supponiamo che siano verificate le seguenti ipotesi:

a) le curve rappresentate dalle (23) non abbiano punti in comune che appartengono alla  $\gamma$ ;

b) la  $\gamma$  intersechi ciascuna delle due curve rappresentate dalle (23) in due punti distinti (e non più di due);

c) ognuna delle due curve rappresentate dalle (23) abbia in  $\mathfrak{D}$  un unico circuito.

Sia  $P$  un punto che descrive la  $\gamma$  in verso antiorario e consideriamo, in un piano in cui  $u$  e  $v$  sono coordinate cartesiane ortogonali, il punto  $Q$  le cui coordinate sono date da

$$(24) \quad u = u(x, y); \quad v = v(x, y).$$

Dalle proprietà che abbiamo supposte vere per le funzioni  $u$  e  $v$  si deduce che quando il punto  $P$  descrive la  $\gamma$ , il punto  $Q$  descrive nel suo piano una curva  $\Gamma$  che risulta essere chiusa. Si ha facilmente il

**TEOREMA:** Se la curva chiusa  $\Gamma$  si avvolge almeno una volta attorno all'origine del piano in cui  $u$  e  $v$  sono coordinate cartesiane, le due curve rappresentate dalle equazioni (23) ammettono almeno un punto comune interno a  $\gamma$  <sup>(6)</sup>.

Per la dimostrazione si osservi anzitutto che, in forza delle proprietà che abbiamo supposte vere per le curve rappresentate dalle equazioni (23), la regione interna alla curva  $\gamma$  viene divisa da ognuna delle curve in due parti: per es. la curva rappresentata dalla equazione  $u=0$  divide la regione interna alla curva  $\gamma$  in due regioni; in una di esse si ha  $u > 0$  e nell'altra si ha  $u < 0$ ; analoga proprietà si può enunciare per la curva rappresentata dalla equazione  $v=0$ .

Indichiamo ora con  $U_j$  ed  $U'_j$  (v. fig. 2) i punti in cui la curva  $\gamma$

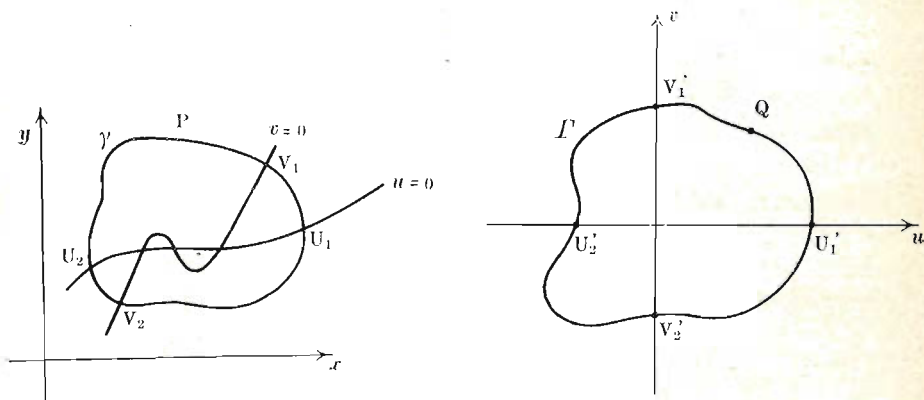


Fig. 2

interseca la curva rappresentata dalla equazione  $u=0$ ; analogamente indichiamo con  $V_1$  e  $V_2$  i punti in cui la curva  $\gamma$  interseca la curva rappresentata dalla equazione  $v=0$ . Siano poi  $U'_1$  ed  $U'_2$ ,  $V'_1$  e  $V'_2$  i punti che sulla  $\Gamma$  corrispondono ai punti  $U_1$  ed  $U_2$ ,  $V_1$  e  $V_2$  rispettivamente. I punti  $U'_1$  e  $U'_2$ ,  $V'_1$  e  $V'_2$  della  $\Gamma$  appartengono agli assi coordinati del piano in cui  $u$  e  $v$  sono coordinate cartesiane e pertanto il fatto che la  $\Gamma$  si avvolge almeno

<sup>(6)</sup> Cfr. Per es. F. SEVERI - *Topologia* (Buenos Aires, 1931).



una volta attorno all'origine delle coordinate implica che sulla  $\Gamma$  la coppia di punti  $U'_1$  ed  $U'_2$  separa la coppia di punti  $V'_1$  e  $V'_2$ . Ciò significa che nel piano della curva  $\gamma$  la curva rappresentata dalla equazione  $u=0$  possiede due punti che stanno l'uno nella regione in cui è  $v > 0$  e l'altro nella regione in cui è  $v < 0$ . Si conclude pertanto che allora la curva rappresentata dalla equazione  $u=0$  ha almeno un punto in comune con la curva rappresentata dalla equazione  $v=0$ .

In margine a questa dimostrazione, si possono fare alcune osservazioni: anzitutto si osservi che la condizione che la curva  $\Gamma$  si avvolga almeno una volta attorno all'origine del piano in cui  $u$  e  $v$  sono coordinate cartesiane è condizione sufficiente ma non necessaria perchè le due curve, rappresentate dalle equazioni (23) abbiano almeno un punto in comune nell'interno della regione limitata dalla curva  $\gamma$ .

Infatti si costruiscono con molta facilità degli esempi elementari nei quali le due curve hanno nell'interno della curva  $\gamma$  un numero pari ma diverso da zero di intersezioni ed in cui le due coppie di punti  $U_1$  e  $U_2$ ,  $V_1$  e  $V_2$  non sono separantisi; di conseguenza la curva  $\Gamma$  non si avvolge attorno all'origine del suo piano.

In secondo luogo si osservi che il teorema afferma la esistenza di almeno un punto comune alle due curve rappresentate dalle equazioni (23) quando sia soddisfatta la ipotesi; esso non dà la possibilità di determinare il numero delle intersezioni. Anzi a rigore il teorema avrebbe senso anche se non avesse senso parlare di « numero delle intersezioni » tra le due curve (7).

Questa apparente minore portata del teorema che abbiamo enunciato rispetto al teorema dell'indicatore logaritmico di CAUCHY è da ritenersi fondata nel fatto ovvio che le ipotesi che abbiamo supposte valide per le due funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  nel nostro caso sono molto meno restrittive di quelle che valgono quando le funzioni stesse sono rispettivamente parte reale e coefficiente dell'immaginario di una funzione monogena della variabile complessa  $z = x + iy$ ; in quest'ultimo caso infatti le condizioni di monogeneità, espresse dalle (3), implicano che le funzioni stesse siano indefinitamente derivabili e che ognuna di esse sia una funzione armonica. Ciò porta come conseguenza che i valori

(7) Ciò avverrebbe per es. se queste avessero infinite intersezioni oppure addirittura un tratto comune nell'interno della regione limitata da  $\gamma$ .

che le funzioni assumono nella regione interna a  $\gamma$  sono determinabili in base alla conoscenza dei valori assunti nei punti di  $\gamma$  (\*).

Dal punto di vista geometrico, come è noto, la validità delle (3) per le funzioni  $u$  e  $v$ , porta come conseguenza che le curve rappresentate dalle (23) sono ortogonali tra loro in ogni punto in cui eventualmente si intersecano.

Ovviamente anche il teorema da noi enunciato potrebbe essere applicato, con le debite rettifiche, alla dimostrazione del cosiddetto « Teorema fondamentale dell'Algebra » (9).

Quando le intersezioni tra le due curve rappresentate dalle equazioni (23) siano in numero finito e le curve stesse non siano tra loro tangenti nei punti in cui si intersecano, è facile dare una interpretazione del numero di avvolgimenti della curva  $\Gamma$  attorno all'origine del suo piano ricollegandolo agli indici di KRONCKER delle intersezioni delle due curve nell'interno della regione limitata dalla  $\gamma$ .

Ricordiamo che, date due curve, per es. quelle rappresentate dalle equazioni (23), è possibile attribuire con determinate convenzioni ad ogni punto  $Z$  in cui esse si intersecano senza essere tangenti tra loro un indice (detto appunto « indice di KRONCKER ») che vale  $+1$  oppure  $-1$ : per es. si osservi che considerata una circonferenza avente centro in  $Z$  ed abbastanza piccola perchè nel suo interno non cadano altre intersezioni tra le due curve, la regione interna a  $k$  viene divisa in quattro parti, in corrispondenza alle quattro combinazioni possibili per i segni delle due funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ . Invero vi sarà una regione in cui entrambe le funzioni sono positive, una in cui entrambe sono negative e due regioni in cui una sola delle funzioni è positiva.

Orbene potremo attribuire al punto  $Z$ , considerato come punto di intersezione della coppia ordinata di curve  $u, v$ , l'indice

(8) Ciò si ottiene per es. dalla classica « formula di CAUCHY »:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t)dt}{t-z}.$$

(9) Cfr. Articolo di W. SPEHR già citato. D'altra parte è facile scorgere una analogia tra la dimostrazione del teorema qui riportato ed una classica dimostrazione di GAUSS del teorema fondamentale dell'Algebra. Si veda a proposito di quest'ultimo l'articolo di U. GASPARINA sul « Periodico di Matematiche », Vol. XLV (1957).



+ 1 se le quattro regioni caratterizzate dalle condizioni

- I)  $u > 0, v > 0,$       II)  $u < 0, v > 0$   
 II I)  $u < 0, v < 0,$       IV)  $u > 0, v < 0$

si susseguono attorno a  $Z$  nel verso antiorario, come i quadranti in cui il piano viene diviso dagli assi coordinati cartesiani, nelle abituali convenzioni (cfr. fig. 3); daremo al punto  $Z$  l'indice negativo nel caso contrario.

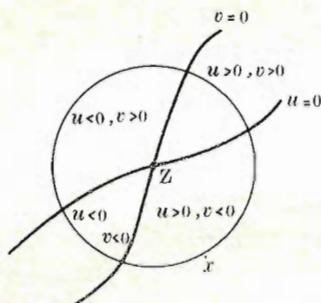


Fig. 3

Si verifica subito che l'indice del punto  $Z$  cambia di segno se si inverte l'ordine in cui le due curve sono considerate; inoltre si ha subito che la dimostrazione da noi ricordata del teorema che ci interessa porta a definire il numero di avvolgimenti della curva  $\Gamma$  attorno all'origine nel suo piano come somma algebrica degli indici di КРОНЕКЕР delle intersezioni della coppia di curve rappresentate dalle equazioni  $u = 0, v = 0$ .

5. - Per giungere a stabilire le analogie e le estensioni di cui abbiamo detto nel paragrafo introduttivo è opportuno qui richiamare brevemente un'altra serie di risultati classici riguardanti il computo delle radici delle equazioni, risultati che fanno parte della cultura abituale che viene impartita nei primi anni dei corsi universitari di matematica. Tali risultati riguardano le radici reali di equazioni algebriche a coefficienti reali; si consideri un polinomio

$$(25) \quad F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

dove i coefficienti e la variabile  $x$  sono supposti *reali*; siano poi  $\alpha$  e  $\beta$  due numeri reali e si supponga

$$(26) \quad \alpha < \beta.$$

Siano poi

$$(27) \quad F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x) \quad (k \leq n)$$

certe  $k$  funzioni, costruite opportunamente a partire dal polinomio  $F(x)$  dato. Supponiamo infine che il polinomio  $F(x)$  e le funzioni (27) non abbiano valore zero nè in  $\alpha$  nè in  $\beta$  e consideriamo la successione di funzioni

$$(28) \quad F(x), F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x).$$

Ovviamente quando si calcoli il valore di ogni singolo elemento della successione (28) in corrispondenza al valore  $\alpha$  oppure al valore  $\beta$  si ottengono due successioni di numeri reali (diversi da zero per ipotesi): indichiamo convenzionalmente con  $V(\alpha)$  e con  $V(\beta)$  il numero delle variazioni di segno che presenta la successione dei valori delle funzioni (28) quando si calcolino in corrispondenza al valore  $\alpha$  oppure al valore  $\beta$  rispettivamente <sup>(10)</sup>.

Orbene è possibile costruire la successione di funzioni (28) in modo tale che si abbia

$$(29) \quad V(\alpha) > V(\beta)$$

e che la differenza

$$(30) \quad N = V(\alpha) - V(\beta)$$

sia una funzione del numero delle radici dell'equazione

$$(31) \quad P(x) = 0$$

appartenenti all'intervallo  $[\alpha, \beta]$ .

Tra i procedimenti più noti per costruire la successione (28) ricorderemo qui il procedimento di FOURIER o, come suol dirsi, di BUDAN-FOURIER, e quello di STURM.

---

<sup>(10)</sup> È noto che cosa si intenda indicare dicendo che in una successione numerica vi è una « variazione di segno »: si intende dire che due elementi successivi della successione hanno segni opposti tra loro.



Nel caso del procedimento di FOURIER si ha anzitutto  $k = n$  e le funzioni  $F_i(x)$  che compaiono nella successione (27) sono le derivate successive del polinomio  $F(x)$ , avendosi dunque

$$(32) \quad F_i(x) = \frac{d^i}{dx^i} F(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

In questo caso si ha che, indicato con  $x_1$  un valore appartenente all'intervallo  $[\alpha, \beta]$  e che sia radice della equazione (31) ed indicato con  $h$  un numero reale positivo sufficientemente piccolo perchè nell'intervallo  $[x_1 - h, x_1 + h]$  non esistano altre radici diverse da  $x_1$  <sup>(11)</sup> si ha

$$(33) \quad V(x_1 - h) - V(x_1 + h) = r,$$

$r$  essendo la molteplicità della radice  $x_1$  per la equazione (31). Questo risultato si ottiene facilmente in forma elementare quando si osservi che per la funzione  $F(x)$  vale la classica formula di TAYLOR

$$(34) \quad F(x_1 + h) = F(x_1) + \sum_{i=1}^n h^i F_i(x_1)/i!$$

e che per la derivata prima  $F_1(x)$  si ha pure

$$(35) \quad F_1(x_1 + h) = F_1(x_1) + \sum_{i=1}^{n-1} h^i F_{i+1}(x_1)/i!$$

e si ricordi inoltre che condizione necessaria e sufficiente perchè la radice  $x_1$  sia di molteplicità  $r$  è che si abbia

$$(36) \quad F(x_1) = F_1(x_1) = \dots F_{r-1}(x_1) = 0; \quad F_r(x_1) \neq 0.$$

Si usa esprimere quanto abbiamo detto fin qui con parole dicendo che « quando la variabile  $x$  attraversa una radice  $x_1$  della equazione (31) da sinistra a destra, la successione (28) perde un

---

<sup>(11)</sup> Osserviamo che è sempre possibile determinare (almeno) un numero  $h$  cosiffatto, perchè le radici della equazione (31) sono in numero finito, a meno che tutti i coefficienti siano nulli, il che è ovviamente da escludersi.

numero di variazioni uguali alla molteplicità della radice stessa ».

Si dimostra facilmente poi che altre variazioni, *sempre in numero pari*, possono essere « perdute » in corrispondenza a valori che annullino qualcuna delle funzioni  $F_i$  e che non siano radici dell'equazione (31). Pertanto nel caso della successione di FOURIER si ha

$$(37) \quad N_0 = V(\alpha) - V(\beta) - 2\mu$$

essendo  $\mu$  un intero non negativo ed essendo  $N_0$  la somma delle molteplicità delle radici della equazione (31) appartenenti all'intervallo  $[\alpha, \beta]$ . Come è noto si ha un notevole caso particolare di questo risultato nella cosiddetta « Regola di DESCARTES »; in essa la (37) viene applicata all'intervallo  $(0, +\infty)$  essendo allora  $V(\alpha) - V(\beta)$  il numero delle variazioni della successione dei coefficienti.

Una seconda modalità per la costruzione della successione (28) è, come noto, quella che porta alla cosiddetta « successione di STURM ».

Nelle esposizioni abituali si parte dalla ipotesi che la equazione (31) abbia radici tutte semplici, e pertanto non abbia radici comuni con la equazione

$$(38) \quad F'(x) = na_0x^{n-1} + \dots + a_{n-1} = 0.$$

In questa successione si pone

$$F_1(x) = F'(x)$$

essendo  $F'$  il polinomio derivato dal polinomio  $F$ , e si costruiscono poi le funzioni successive con la regola ricorrente

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x) = Q_1(x) \cdot F_1 - F_2 \\ F_1(x) = Q_2(x) F_2 - F_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_{k-2}(x) = Q_{k-1}(x) F_{k-1} - F_k \end{array} \right.$$

Il lettore riconoscerà facilmente nelle (39) un procedimento analogo a quello chiamato « algoritmo euclideo delle divisioni successive » per la ricerca del massimo comun divisore fra i due polinomi  $F$  ed  $F_1$ ; in particolare si verifica facilmente che i gradi dei polinomi  $F_i$  formano una successione decrescente; inoltre poi-



chè l'ultimo polinomio non nullo è, a meno del segno, il massimo comun divisore tra  $F$  ed  $F_1$  si avrà  $k \leq n$ ; ed infine  $F_k$  sarà una costante, essendo i due polinomi primi fra loro.

In corrispondenza alla successione di funzioni costruita col procedimento di STURM, si ha

$$(40) \quad N_0 = V(\alpha) - V(\beta)$$

essendo ancora una volta  $N_0$  il numero di radici della equazione (31) appartenenti all'intervallo  $[\alpha, \beta]$ .

La dimostrazione della (40) si consegue facilmente osservando che, anche per la successione di STURM, con ragionamenti analoghi a quelli svolti per la successione di FOURIER, in corrispondenza ad ogni radice della equazione (31) si « perde » una variazione della successione. Pertanto poichè le radici della (31) sono in questo caso tutte semplici, la differenza  $V(\alpha) - V(\beta)$  è almeno uguale al numero delle radici dell'equazione (31) che appartengono all'intervallo  $[\alpha, \beta]$ ; si giunge poi a garantire che la differenza suddetta sia *esattamente* uguale al numero delle radici osservando che nessuna altra « perdita » di variazioni vi può essere in corrispondenza a radici delle funzioni  $F_i$  perchè:

a) non esistono valori che siano radici di due funzioni  $F_i$ ,  $F_{i+1}$  di indici consecutivi; infatti se esistesse un valore cosiffatto, dalle (39) si dedurrebbe che esso sarebbe radice comune anche alla  $F$  ed alla  $F_1$ , contro l'ipotesi;

b) se esiste un valore  $\bar{x}$  in corrispondenza al quale è

$$(41) \quad F_i(\bar{x}) = 0$$

si ha, sempre per le (39),

$$(42) \quad F_{i-1}(\bar{x}) \cdot F_{i+1}(\bar{x}) < 0$$

e pertanto, quando si attraversi una radice  $\bar{x}$  di una funzione  $F_i$ , nella successione (28) si ottiene semplicemente il cambiamento di posto di una variazione già esistente.

L'enunciato del teorema di STURM può essere immediatamente generalizzato osservando che le proprietà della successione, ora rilevate, non cambiano qualora tutti i termini della successione stessa vengano moltiplicati per una medesima funzione  $f(x)$ .

In particolare questa osservazione si applica al caso in cui  $F$  ed  $F_1$  non siano primi fra loro; allora l'ultimo resto diverso da zero  $F_k$  che compare nelle (39) è il massimo comun divisore tra  $F$  ed  $F_1$  e, come è noto, ammette come radici le radici multiple di  $F$ . Immaginando di dividere tutte le (39) per  $F_k$  si otterrebbe allora una successione che soddisfa alle ipotesi restrittive da noi enunciate all'inizio e che pertanto darebbe mediante la (40) il numero di radici diverse tra loro della equazione (31) appartenenti all'intervallo  $[\alpha, \beta]$ .

In base all'osservazione fatta, lo stesso vale anche per la successione costruita mediante le (39) anche se la (31) non ha radici tutte semplici.

6. - Abbiamo ricordato nel precedente paragrafo due fra le modalità più frequenti con cui si costruiscono delle successioni di funzioni che sono atte a dare informazioni sul numero delle radici di una funzione appartenenti ad un intervallo  $[\alpha, \beta]$ . Vogliamo qui illustrare brevemente la possibilità di assegnare degli strumenti topologici atti ad ottenere lo stesso fine, ed a conseguire contemporaneamente una interessante generalizzazione dei criteri esposti nel paragrafo precedente ed un collegamento coi risultati classici illustrati nei paragrafi iniziali. Ci limiteremo ad illustrare casi molto particolari, da cui tuttavia si potrà intravedere la via per ulteriori opportune generalizzazioni.

Si consideri una funzione  $F(x)$  definita nell'intervallo  $[\alpha, \beta]$  (estremi inclusi) che supporremo dotata di derivata  $F'(x)$ , continua nello stesso intervallo. Supponiamo che la  $F(x)$  non abbia radici negli estremi dell'intervallo, e che non abbia in esso radici comuni con la derivata: siano valide quindi le relazioni

$$(43) \quad F(\alpha) \cdot F(\beta) \neq 0$$

ed inoltre

$$(44) \quad F^2 + F'^2 > 0$$

in tutto l'intervallo.

In base alle ipotesi di continuità emesse per la  $F$  è possibile scegliere un numero reale  $\delta$  positivo opportunamente piccolo tale



che i valori

$$(45) \quad b = F(\alpha + \delta) - \delta F'(\alpha + \delta)/2$$

e

$$(46) \quad b' = F(\beta - \delta) - \delta F'(\beta - \delta)/2$$

differiscano da  $F(\alpha)$  ed  $F(\beta)$  rispettivamente in valore assoluto per meno di un  $\epsilon$  arbitrario prefissato; in particolare tale  $\epsilon$  verrà da noi scelto in modo che i valori (45) e (46) abbiano rispettivamente gli stessi segni di  $F(\alpha)$  ed  $F(\beta)$ .

Definiamo ora una funzione  $\Phi(x)$  nell'intervallo  $[\alpha, 2\beta - \alpha]$ , con le seguenti convenzioni

$$(47) \quad \begin{aligned} \Phi(x) &= F(\alpha + \delta) + \frac{F'(\alpha + \delta)}{2\delta} [(x - \alpha)^2 - \delta^2] && \text{per } \alpha \leq x \leq \alpha + \delta \\ \Phi(x) &= F(x) && \text{per } \alpha + \delta \leq x \leq \beta - \delta \\ \Phi(x) &= F(\beta - \delta) - \frac{F'(\beta - \delta)}{2\delta} [(x - \beta)^2 - \delta^2] && \text{per } \beta - \delta \leq x \leq \beta \\ \Phi(x) &= \Phi(2\beta - x) && \text{per } \beta \leq x \leq 2\beta - \alpha. \end{aligned}$$

Dal punto di vista geometrico si potrebbe dire che la grafica della funzione  $\Phi(x)$  si può ottenere (fig. 4) costruendo anzitutto un « duplicato » speculare della grafica della funzione  $F(x)$  mediante una simmetria rispetto alla retta di equazione

$$(48) \quad x - \beta = 0.$$

e poi « raccordando » le due grafiche mediante un archetto di parabola in corrispondenza all'ascissa  $x = \beta$ , ed analogamente « raccordando » con archetti simili la grafica così ottenuta in corrispondenza alle ascisse estreme  $x = \alpha$ ,  $x = 2\beta - \alpha$  in modo da

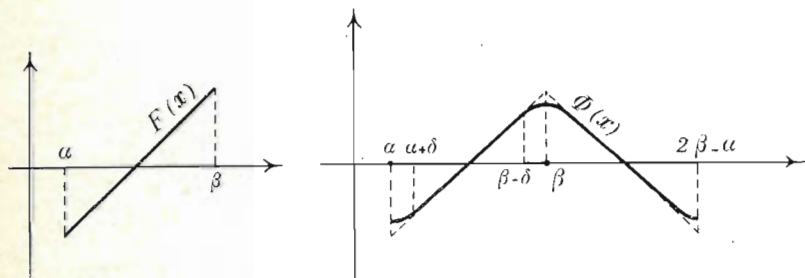


Fig. 4

ottenere negli estremi tangenti orizzontali; i raccordi tuttavia essendo fatti in modo da alterare di poco l'andamento della grafica, ed in particolare senza interessare i punti in cui la stessa incontra l'asse delle  $x$ ; il che è sempre possibile per la supposta continuità della funzione  $F$  e della sua derivata.

Si immagini ora un piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali  $X, Y$  ed in questo si consideri la curva  $\varphi$  rappresentata parametricamente dalle equazioni

$$(49) \quad X = \Phi(x); \quad Y = \Phi'(x);$$

per  $x$  appartenente all'intervallo  $[\alpha, 2\beta - \alpha]$ . Per la ipotesi (44) la curva  $\varphi$  non passa per l'origine, e per il modo come abbiamo costruito la funzione  $\Phi$ , essa risulta essere chiusa (fig. 5). Si vede

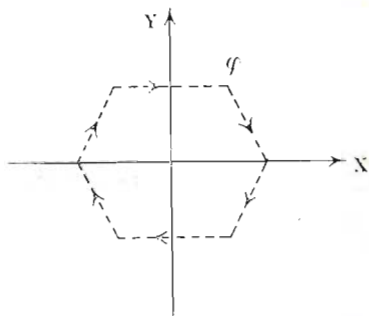


Fig. 5

facilmente che, se la funzione  $F$  ha nell'intervallo  $[\alpha, \beta]$  un numero finito  $\nu$  di radici, la curva  $\varphi$  si avvolge un eguale numero  $\nu$  di volte attorno all'origine, in verso orario. Pertanto si potrebbe porre per es.

$$(50) \quad \nu = \frac{-1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\beta - \alpha} d \arcsos \Phi(x) / \sqrt{\Phi^2 + \Phi'^2}.$$

Ovviamente, dato il significato topologico che viene attribuito al numero  $\nu$ , esso risulta indipendente da piccole deformazioni della curva  $\varphi$  <sup>(12)</sup>.

(12) Ciò che abbiamo detto fin qui è una illustrazione di risultati classici; confronta per es. E. GOURSAT - *Cours d'Analyse Mathématique*. Vol. I, Cap. IV (Paris, 1933).



Viceversa si può dimostrare che se il numero (intero)  $\nu$  dato dalla (50) è finito, esso rappresenta il numero di radici possedute dalla funzione  $F(x)$  nell'intervallo.

Con una analisi più delicata si potrebbe dimostrare che è possibile partire da ipotesi meno restrittive della (44), ma non intendiamo dilungarci su questo argomento. Ci basti qui avere illustrato proposizioni classiche di notevole portata e mostrato loro interpretazioni topologiche che appaiono non prive di eleganza.

C. F. MANARA

## OPERE SCIENTIFICHE E TECNICHE

AGOSTINELLI - <i>Istituzioni di fisica matematica</i> . Vol. I	7200
AGOSTINELLI e PIGNEDOLI - <i>Meccanica razionale</i> . Vol. I	6000
— — <i>Meccanica razionale</i> . Vol. II	4800
ALBERIGI-QUARANTA e RISPOLI - <i>Elettronica</i>	7200
<i>Atti del Congresso internazionale dei Matematici (1928)</i> 6 volumi. Ciascuno	1000
<i>Atti del primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana</i> , tenuto in Firenze nei giorni 1-2-3 Aprile 1937	3000
BELLUZZI - <i>Scienza delle costruzioni</i> . Vol. I	6000
— — <i>Scienza delle costruzioni</i> . Vol. II	6000
— — <i>Scienza delle costruzioni</i> . Vol. III	7200
— — <i>Scienza delle costruzioni</i> . Vol. IV	4800
— — <i>Metodi semplici per lo studio delle lastre curve</i>	500
BOLCATO - <i>La chimica delle fermentazioni</i>	6000
BORDONI - <i>Fondamenti di fisica tecnica</i> . Vol. I	6000
CANNERI - <i>Nozioni di chimica analitica</i>	5000
CASTELNUOVO - <i>Calcolo delle probabilità</i> . Vol. I	2400
CHISINI - <i>Lezioni di geometria analitica e proiettiva</i>	4200
— — <i>Esercizi di geometria analitica e proiettiva</i>	2400
— — <i>Note e memorie di geometria (selezione)</i>	9600
COULSON - <i>La valenza</i>	3600
DE CASTRO - <i>Complementi di analisi matematica</i>	4800
DORE - <i>Fondamenti di fotogrammetria</i>	2400
ENRIQUES - <i>Le superficie algebriche</i> , con prefazione di G. Castelnuovo	3600
— — <i>Memorie scelte di geometria</i> . Volume I, 1893-1898	8000
— — <i>Memorie scelte di geometria</i> . Volume II, 1899-1910	8000
ENRIQUES e MAZZIOTTI - <i>Le dottrine di Democrito d'Abdera</i>	1500
EVANGELISTI - <i>La regolazione delle turbine idrauliche</i>	2600
FERRARO - <i>Piccolo dizionario di Metrologia generale</i> . Legato	3000
FERRI - <i>Guida dei principali prodotti chimici</i> . Vol. I	7000
Vol. II	8000
FILIPPI - <i>Resistenza dei materiali e applicazioni</i>	2500
FINZI - <i>Meccanica razionale</i> . Voll. I-II	8400
FINZI e PASTORI - <i>Calcolo tensoriale e applicazioni</i>	7200
FOÀ - <i>Fondamenti di termodinamica</i>	3600
FUBINI e ALBENGA - <i>La matematica dell'ingegnere e le sue applicazioni</i> . Vol. I	4800
Vol. II	7200
LELLI - <i>Bilancio energetico</i> . Legato	4000

ZANICHELLI - BOLOGNA



## OPERE SCIENTIFICHE E TECNICHE

LEVI-CIVITA - <i>Opere matematiche - Memorie e note.</i>	
— — Volume I: 1893-1900	8000
— — Volume II: 1901-1907	9000
— — Volume III: 1908-1916	9000
— — Volume IV: 1917-1928	9000
LEVI-CIVITA e AMALDI - <i>Compendio di meccanica razionale. Vol. I</i>	2400
— — <i>Compendio di meccanica razionale. Vol. II</i>	2400
LEVI-CIVITA e AMALDI - <i>Lezioni di meccanica razionale:</i>	
Vol. I: <i>Cinematica - Principi e statica</i>	6000
Vol. II: <i>Dinamica dei sistemi con un numero finito di</i>	
<i>gradi di libertà</i> { Parte I	4800
Parte II	6000
MELLONI - <i>Opere. Vol. I. Legato</i>	5000
MONTAUTI - <i>Il telemetro monostatico</i>	2000
PERSICO - <i>Introduzione alla fisica matematica</i>	4800
— — <i>Gli atomi e la loro energia. Legato</i>	6600
RIGHI - <i>Scelta di scritti</i>	4000
RIMINI - <i>Elementi di elettrotecnica</i>	4800
— — <i>Fondamenti di radiotecnica generale</i>	5400
— — <i>Fondamenti di analisi matematica. Vol. I</i>	4800
— — <i>Fondamenti di analisi matematica. Vol. II</i>	7200
SANSONE - <i>Equazioni differenziali nel campo reale. Parte I</i>	4800
— — <i>Idem. Parte II</i>	4800
<i>Scritti Matematici, offerti a LUIGI BERZOLARI</i>	2500
SUPINO E. - <i>Il disegno di macchine</i>	600
TORALDO DI FRANCIA - <i>Onde elettromagnetiche</i>	3600
TRICOMI - <i>Funzioni ellittiche</i>	5400
— — <i>Funzioni analitiche</i>	2000
VITALI-SANSONE - <i>Moderna teoria delle funzioni di variabile</i>	
<i>reale. Parte I</i>	3600
— — <i>Parte II</i>	8200
VOLTA - <i>Epistolario. Edizione nazionale. Vol. I</i>	5000
— — <i>Volume II</i>	5000
— — <i>Volume III</i>	5000
— — <i>Volume IV</i>	6000
— — <i>Volume V</i>	6000
ZAGAR - <i>Astronomia sferica e teorica</i>	2500

ZANICHELLI - BOLOGNA